

Rappel :

$$\text{Soit } G \leq \text{Sym}(\Omega)$$

Pour $A \subseteq \Omega$ fini,

$$G_A = \{g \in G, \forall a, g(a) = a\}$$

De plus, pour $G \overset{\pi}{\rightarrow} H$.

$$H_A = \{ \underline{\zeta} \in H, \forall g \in G_A, \pi(g) \zeta = \zeta \}$$

Lemme :

$$1) \forall A, \forall g \in G, \pi(g) H_A = H_{g(A)}$$

$$2) H = \overline{\bigcup_{\substack{A \subseteq \Omega \\ \text{fini}}} H_A}$$

$$\text{NB: } A \subseteq B \\ H_A \subseteq H_B$$

$$\text{Pe : } G = \text{Sym}(\Omega)$$

Ω - sommets d'un graphe

$$G = \text{Aut}(X) \subseteq \text{Sym}(\Omega)$$

Ω - espace métrique avec d

$$G = \text{Isom}(\Omega, d) \leq \text{Sym}(\Omega)$$

Ω est l'ensemble sous-jacent
d'une structure M , $G = \text{Aut}(M)$

Définition : Soit $G \leq \text{Sym}(\Omega)$

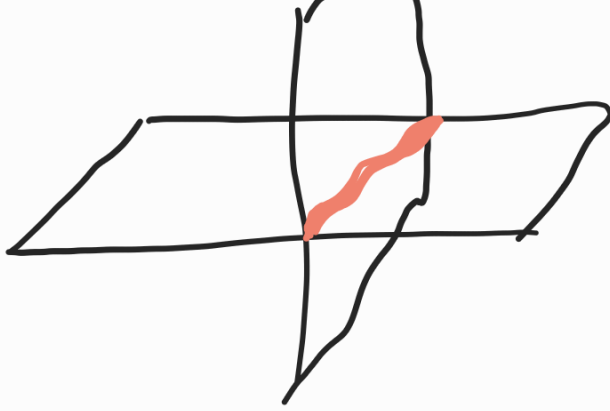
on dit que G est dissociée si

$$\forall \pi: G \curvearrowright H, \forall A, B \subseteq \Omega$$

$$\begin{array}{ccc} f|_A & \frac{1}{H} & f|_B \\ & H_{A \cap B} & \end{array}$$

En notant $p_A: H \rightarrow f|_A$ proj. orth

$$p_A p_B = p_{A \cap B}$$



Supposons G dissocié et fixons :

$$\pi: G \rightarrow \mathcal{H} \neq \emptyset$$

$$\mathcal{H} = \overline{\bigcup_{\substack{A \subseteq \Omega \\ \text{fin.}}} \mathcal{H}_A}$$

$\exists A_i^{\text{fin}}, \mathcal{H}_{A_i} \neq \emptyset$
de cardinal minimal

Pour $g, h \in G$.

$$\pi(g)\mathcal{H}_A = \mathcal{H}_{g(A)} \perp \mathcal{H}_{h(A)} = \pi(h)\mathcal{H}_A$$

Dès que $g(A) \neq h(A)$, $\underbrace{\mathcal{H}_{g(A) \cap h(A)}}_{\neq \emptyset}$

$$|g(A) \cap h(A)| < |A|$$

Par choix de A , dans ce cas,

$$\pi(g)\mathcal{H}_A \perp \pi(h)\mathcal{H}_A$$

Posons : $G_{\{A\}} = \{g \in G, g(A) = A\}$
 $\uparrow$
 $\geq G_A$

Alors : $\forall g, h \in G, g(A) = h(A)$
 $\Leftrightarrow g G_{\{A\}} = h G_{\{A\}}$

Donc : $\forall g, h \in G, g G_{\{A\}} \neq h G_{\{A\}}$

$\pi(g) H_A \perp \pi(h) H_A$

$G/G_{\{A\}}$ translate les H_A

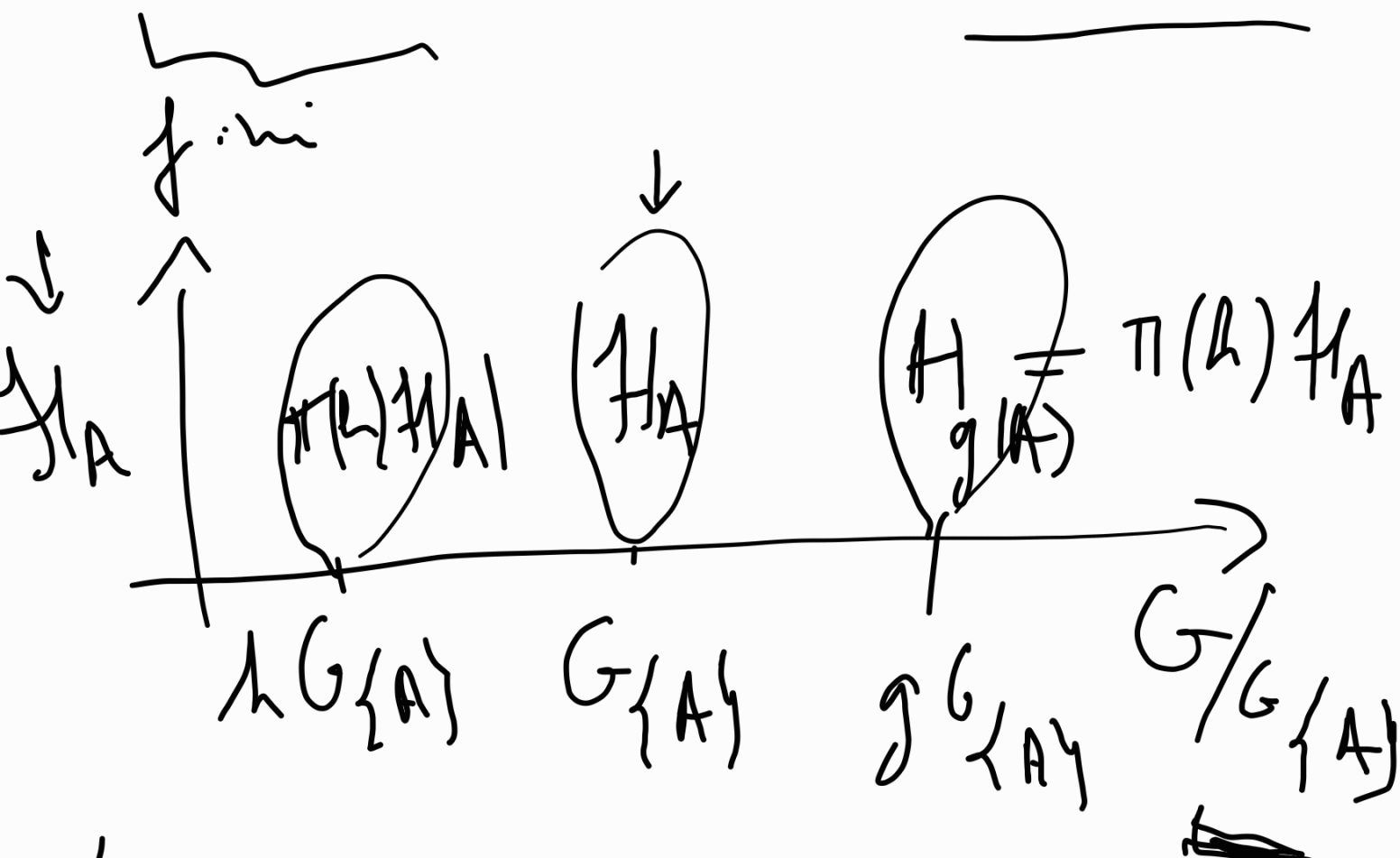
$G_{\{A\}} \cap H_A$
 $\downarrow$
 G_A

$\leq \text{Sym}(A)$ fini

$$\bigoplus_{g \in G/G_{\{A\}}} \mathbb{H}_g(A) \subseteq \mathbb{H}$$

Sous représentation de Π déterminée par :

$$G_{\{A\}}/G_A \hookrightarrow \mathbb{H}_A, \quad G \hookrightarrow G/G_{\{A\}}$$



Lemme :

$$\forall \pi: G \rightarrow H,$$

$$\exists A \subseteq \Omega, \exists \sigma: G_{\{A\}} / \Omega \rightarrow K$$

$$\text{tg } \text{Ind}_{G_{\{A\}}}^G(\sigma) \subseteq \pi$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{ind}} \quad G_A$

qui est aussi irréductible.

σ se décompose en irréductibles

$$\sigma = \bigoplus_{i \in I} \sigma_i \quad \sigma_i: G_{\{A\}} / \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$$

G_A

Fait

$$\text{Ind}_{G_{\{A\}}}^G(\sigma_i) \subseteq \text{Ind}_{G_{\{A\}}}^G(\sigma)$$

Théorème :

Soit $G \leq \text{Sym}(\Omega)$ dissocié.

1) Toute rep de G est somme d'irréductibles

2) Toute irréductible est de

4) sous la forme

$\text{Ind}_{G/A}^G(\sigma)$ pour

$$\left[\begin{array}{l} A \subseteq \Omega \text{ fini} \\ \sigma : G/A \rightarrow \Omega \subseteq \mathbb{C}^n \\ \text{ind}_A^G \end{array} \right.$$

$$3) \forall \text{ ind } \pi, \pi \in \left(\begin{array}{c} \ell^2(\Omega^n) \\ \mathbb{C} \\ G \end{array} \right)$$

$$\subseteq \bigoplus_{h \in \mathbb{N}} \ell^2(\Omega^n)$$

$$\downarrow$$

$$\mathbb{1}_G \quad \mathbb{C} \quad G$$

$$\forall \pi \text{ ind. } \pi \in \mathbb{1}_G$$

Conséquences :

1) G dissocié $\Rightarrow \text{Prop } (\pi)$

2) Dès que G vérifie
 $\exists A \subseteq \Omega$ fini, G est am.

G a Howe-Poore:

$$\forall \pi, H_\phi = 0 \Rightarrow \forall \beta, \eta \in \mathcal{H}$$

$$\int_{\beta, \eta}^\pi (j) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0$$

Théorie ergodique

1) Pour tout $G \curvearrowright (X, \mu)$ non-singulière (respecte la classe de mesure):

— Somme d'ergodiques

— Ergodique: induite

par un $G_A / G \curvearrowright (Y, \mu)$

2) Stuck-Zimmer:

S: $G \not\leq \text{Sym}(\Omega)$ dissocié et transitif, alors $\exists \gamma: G \curvearrowright (X, \mu)$

est ergodique :

— Soit essentiellement tr.

— Soit essentiellement libre

3) G d'indice fini, si

$G \curvearrowright ([0, 1]^{\Omega}, \mu)$ ergodic,

alors $\mu = \nu \otimes \Omega$ (iid).

Théorie ergodique $\Leftrightarrow$ Th des rep

$G \curvearrowright (X, \mu) \rightsquigarrow G \curvearrowright L^2(X, \mu)$

Fait : toute $\pi \text{ ext} \leq L^2(X, \mu)$,

* Exemples : $\mathcal{K}$ -catégoricité
et espace (1) Mylon :

$\mathcal{N}_0$ -catégoricité :

• $\text{Sym}(\Omega)$

$\mathcal{L}$. graphes = $\{\sim\}$

Graphe acyclique:

$$\rightarrow \exists x_1, \dots, x_n, \forall i \neq j \leq n, x_i \neq x_j$$

$$\wedge x_1 = x_n$$

$$\bullet \text{Aut}(\mathcal{A}, <) \leq \text{Sym}(\mathcal{A})$$

"ordre dense et sans
extrémité"

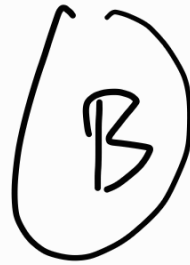
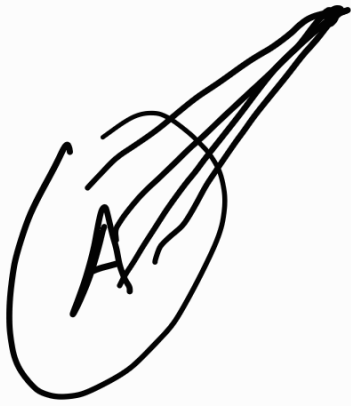
dense: $\forall x < y, \exists z, x < z < y$

$$\bullet \text{Hom}(\mathcal{A}, 2^{\mathbb{N}})$$

• Graphe de Rado:

C'est le seul graphe X den q :

$\forall A, B \subseteq X$ fini, $\exists c \notin A \cup B$
 $A \cap B = \emptyset$ c $\vdash$



$\forall a \in A, a \vdash c$
 $\forall b \in B, b \nvdash c$

Construction : On part d'un graphe X_0 den.

$\forall A \in X_0$ fini, on ajoute c_A
 et $c_A \sim a$ pour tout $a \in A$.

$\leadsto X_1$

$\leadsto$ on recommence

$$X_\infty = \bigcup_{n \geq 0} X_n$$

Théorème :

Il existe un unique
graphe den. X tq

(i) Tout graphe fini se
plonge dans X

(ii) Tout homomorphisme entre
sous-graphes finis de X
 f s'étend à un ho de X .

Nouveaux exemples :

Théorème: Il existe un unique
espace métrique dénombrable U_q

q: (i) Toute espace rationnel fini
se plonge métriquement
dans U_q .

(ii) Toute homélie entre
sous-espaces finis de U_q s'étend

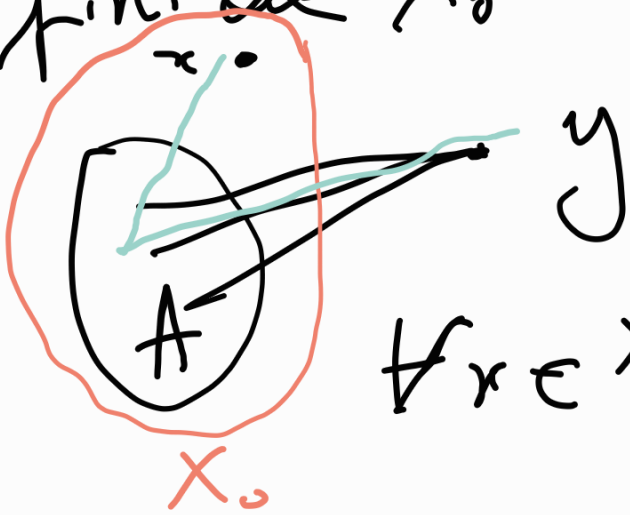
à une métrique de U_a .

Construction de U_a :

Soit X_0 dénombrable à distances rationnelles q.c.q.

p.e. $X_0 = \{ \cdot \}$

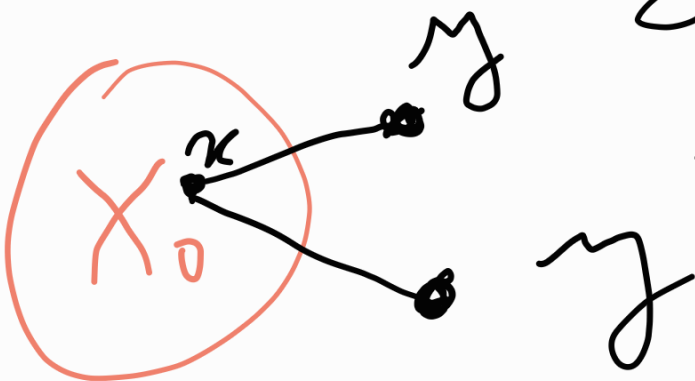
On considère toutes les extensions à 1 point de type fini de X_0 :



$A \subseteq X_0$ fini

$$\forall x \in X_0, d(x, y) = \min_{a \in A + d(y, y)} d(x, a)$$

On a un algorithme tout:



$$\begin{aligned} \text{On pose} \\ d(y, y') &= \min d(y, x) \end{aligned}$$

$$x \in X_0^{(1)} + d(a, j) \in \mathbb{Q}$$

$\leadsto X_1$

On recommence avec X_1

$\leadsto X_2$

Fait : universalité

$$X_0 \hookrightarrow X_1 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow U_a$$

$$\text{Isom}(X_0) \hookrightarrow \text{Isom}(X_1) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \text{Isom}(U_a)$$

$\hat{=}$
 plongement
 de gp top.

Théorème :

$$\text{Isom}(U_a) \leq \text{Sym}(U_a)$$

est dissocié.

Idées de preuve :

Théorème :

Soit $\Delta \subseteq \mathbb{R}_+$ dénombrable
glante un unique espace Δ -met.

$\mathcal{U}_\Delta$ ^{tg}

- (i) Universalité pour
les espaces Δ -métrique
finis
- (ii) Homogénéité.

On écrit $\mathcal{Q} = \bigcup_{n \geq 0} \uparrow \Delta_n$

Δ_n fini

• On peut de $X_0 = \mathcal{U}_{\Delta_0}$

• Se construit dessus $\mathcal{U}_{\Delta_1}$

$\mathcal{U}_{\Delta_0} \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \mathcal{U}_{\Delta_1}$

$\text{Isom}(\mathcal{U}_{\Delta_0}) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \text{Isom}(\mathcal{U}_{\Delta_1})$

$$U_{\Delta_0} \hookrightarrow U_{\Delta_1} \hookrightarrow \dots \hookrightarrow U_{\mathcal{A}}$$

$$\text{Isom}(U_{\Delta_0}) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \text{Isom}(U_{\mathcal{A}})$$

De plus :

$$\bigcup \text{Isom}(U_{\Delta_0}) \subseteq \text{Isom}/U_{\mathcal{A}} \text{ dense.}$$

où $\forall n$, $\text{Isom}(U_{\Delta_n})$ est $\mathcal{K}_0$ -cat
donc dissocié

G gp top.

d - distance invariante à gauche

$B \subseteq G$ est gros. borné

si $\forall d$, écart invariant
et $C \geq$

$$d(B) < \infty$$

